第4卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol. 4, No. 1
1987年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1987

广义系统的受限能控性*

程兆林　张纪锋

（山东大学）

摘　要

本文讨论广义系统在控制能量或幅值受限下的状态能控性，得到了充要条件，这一充要条件指出，广义系统在控制受限下的能控性不仅取决于它的慢子系统的能控性，并且还取决于慢子系统的特征根的分布。

一、引　言

下述系统，

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

称为广义系统，其中 $x\in R^n$，$u\in R^r$，$E,A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，E,A,B 均为常阵，并且 E 为奇异阵，E,A 满足 $\det(sE-A)\neq 0$。广义系统的早期文献见于 Rosenbrock[1]，他主要研究了系统的分解和解的结构。随后，Verghese 等[2]引入了强能控、强能观概念及判别准则，Cobb[3]讨论了状态反馈、极点配置等工程设计问题。不少文献[4],[5]指出，广义系统在电网络分析及社会经济领域有着广泛的应用。

鉴于以往的文献都是在控制函数 u 不受任何限制的情况下讨论的，而实际系统中的 u 总是要受到各种限制，因此，讨论广义系统在受限控制作用下的性态有着明显的实际意义，本文基于此展开对控制能量或幅值受限下系统状态能控性的讨论，阐明充要条件。

二、广义系统在控制能量或幅值受限下的状态能控性

文献[1]指出，系统（1.1）总可以 r. s. e. (restricted system equivalent)等价于下述系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u, & (2.1)\\ N\dot{x}_2 = x_2 + B_2u, & (2.2)\end{cases}$$

---

*此项研究系中国科学院科学基金会资助项目。

本文于1985年6月4日收到，1986年6月2日收到修改稿。

式中 $x_1\in R^{n_1}$, $x_2\in R^{n_2}$, $n_1+n_2=n$, $u\in R^r$, A_1, B_1, B_2, N 为相应阶数的常阵，且 N 为幂零阵，幂零指数为 ν. 所谓系统(1.1) r. s. e. 等价于系统 Σ 是指存在满秩常阵 P, Q, P, P, $Q\in R^{n\times n}$, 实现

$$P(sE-A)Q=\begin{bmatrix} sI_{n_1}-A_1 & \\ & sN-I_{n_2}\end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$PB=\begin{bmatrix} B_1\\ B_2\end{bmatrix}, \qquad (2.4)$$

显然，r. s. e. 等价是由下列两种变换实现的：

(i)对(1.1)实行满秩行变换，变换阵为 P；

(ii)对(1.1)的状态实行满秩变换，变换阵为 Q. 鉴于这两种变换不会改变系统的代数结构，因此，讨论系统(1.1)在控制受限下的状态能控性可以以讨论系统 Σ 在控制受限下的状态能控性来替代. Σ 由状态不相耦合的两个子系统构成，其中(2.1)是正常的线性系统，称为 Σ 的慢子系统，(2.2)的解带有脉冲特性，称为 Σ 的快子系统.

定义 2.1　设系统(1.1)，L 为某一指定的正数. 若对于初值 $x(0^-)=x_0$，存在控制 u，u 满足

$$\int_0^{T(x_0)} u^\tau u\,dt\le L, \qquad (2.5)$$

或满足

$$\|u\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}\le L, \qquad (2.6)$$

式中 u_i 为 u 的第 i 个分量，经 u 在 $[0,T(x_0)]$ 作用，将 x_0 引导到 $x(T(x_0))=0$，则称 x_0 为控制能量受限下或控制幅值受限下能控状态.

定义 2.2　若系统(1.1)的任一状态 x_0 为控制能量(控制幅值)受限下能控状态，则称系统(1.1)在控制能量(控制幅值)受限下状态能控.

引理 2.1[6]　设 C 为复方阵，令

$$W_k=I+C\overline{C}^\tau+\cdots+C^{k-1}[\overline{C}^{k-1}]^\tau, \qquad (2.7)$$

式中 $\overline{C}^\tau$ 为 C 的共轭转置矩阵，则当 $k\to\infty$ 时 $W_k^{-1}\to 0$ 的充要条件为 C 的任一特征根 λ_i 满足 $|\lambda_i|\ge 1$.

引理 2.2[6]　设线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu, \qquad (2.8)$$

式中 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times r}$, A,B 为常阵，则系统(2.8)在控制能量或控制幅值受限下状态能控的充要条件为

1° $\mathrm{rank}[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]=n$;

2° A 的任一特征根无正实部.

引理 2.3　设系统（2.1）状态能控，m, n_0 为任二自然数，令

$$f_{m,n_0}(t)=\begin{cases} t^m(1-t)^m, & t\in[0,1] \\ (t-1)^m(2-t)^m, & t\in[1,2] \\ \vdots & \\ (t-n_0+1)^m(n_0-t)^m, & t\in[n_0-1,n_0], \end{cases} \tag{2.9}$$

则矩阵

$$W[f_{m,n_0},\ 0,n_0]=\int_0^{n_0} f^2_{m,n_0}(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt \tag{2.10}$$

正定，并且，存在正数 $\alpha_i(m)$，$\beta_i(m)(i=1,2)$满足

$$\alpha_1(m)W[f_{m,n_0},\ 0,n_0]\leq W[f_{2m,n_0},\ 0,n_0]\leq \beta_1(m)W[f_{m,n_0},\ 0,n_0], \tag{2.11}$$

$$\alpha_2(m)W(n_0)\leq W[f_{m,n_0},\ 0,n_0]\leq \beta_2(m)W(n_0), \tag{2.12}$$

式中

$$W(n_0)=\sum_{i=0}^{n_0-1} e^{-A_1i}[e^{-A_1i}]^\tau. \tag{2.13}$$

证明从略.

文献[3]指出，若广义系统Σ如(2.1)、(2.2)所示，初值为 $x(0^-)=[x_{10}^\tau\ x_{20}^\tau]^\tau$，并且 u 有直到 $\nu-1$ 阶连续导数，u 满足

$$u(0)=u^{(1)}(0)=\cdots=u^{(\nu-1)}(0)=0, \tag{2.14}$$

则其解为

$$x_1(t)=e^{A_1t}x_{10}+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau, \tag{2.15}$$

$$x_2(t)=-\sum_{i=0}^{\nu-2}N^{i+1}\delta^{(i)}(t)x_{20}-\sum_{i=0}^{\nu-1}N^iB_2u^{(i)}(t), \tag{2.16}$$

式中 $u^{(i)}(t)$表示 $u(t)$的第 i 阶导数，$\delta^{(i)}(t)$表示 Dirac $-\delta$ 函数 $\delta(t)$的第 i 阶导数. 从（2.16）可以看出，尽管 $x_2(t)$在 $t=0$ 带有脉冲特性，但在 $t>0$，$x_2(t)$的值却是仅依赖于 $u^{(i)}(t)(i=0,1,\cdots,\nu-1)$的，因此，只要控制函数 u 能把 $x_1(t)$由 x_{10} 引导到 $x_1(T(x_0))=0$，并且 u 足够光滑，满足 $u^{(i)}(0)=0$，$u^{(i)}(T(x_0))=0$，$i=0,1,\cdots,\nu-1$，u 就能把 $x(t)$由 $x(0^-)=[x_{10}^\tau\ x_{20}^\tau]^\tau$ 引导到 $x(T(x_0))=0$.

定理 2.1 广义系统（1.1）在控制能量受限下状态能控的充要条件为它的r.s.e等价系统Σ满足

1° 慢子系统（2.1）状态能控；

2° 慢子系统（2.1）无正实部特征根.

证 只须对系统Σ给出证明.

必要性： 设Σ是控制能量受限下状态能控的，则它的子系统（2.1）也是控制能量受限下状态能控的，将引理2.2应用于系统（2.1）即得所证.

充分性： 设$x(0^-)=[x_{10}^\tau, x_{20}^\tau]^\tau$，$x_{10}\in R^{n_1}$，$x_{20}\in R^{n_2}$，作控制函数$u(t)$：

$$u(t)=-f_{\nu,n_0}^2(t)[e^{-A_1t}B_1]^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}, \tag{2.17}$$

式中 $f_{\nu,n_0}(t)$如（2.9）所示，ν为N阵的幂零指数，$W[f_{\nu,n_0},0,n_0]$如(2.10)所示，n_0为待定自然数，其值将在证明过程中由$x(0^-)$及控制能量的限值L确定. 显然，$u(t)$在区间$[0,n_0]$有直到$\nu-1$阶连续导数，并且

$$u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1)=\cdots=u^{(i)}(n_0)=0,\ i=0,1,\cdots\nu-1. \tag{2.18}$$

由（2.15）、（2.16）知，$u(t)$把$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(n_0)=0$.

下面考察$u(t)$在$[0,n_0]$的能量值. 因$x_{10}=0$时$u=0$，故只须对$x_{10}\neq0$讨论之. 注意到

$$\int_0^{n_0}u^\tau u\,dt=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]$$
$$\cdot\int_0^{n_0}f_{\nu,n_0}^4(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}, \tag{2.19}$$

以及

$$f_{\nu,n_0}^2(t)=f_{2\nu,n_0}(t), \tag{2.20}$$

将（2.20）代入（2.19），并应用（2.11）、（2.12），推得

$$\int_0^{n_0}u^\tau u\,dt=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]\int_0^{n_0}f_{2\nu,n_0}(t)[e^{-A_1t}B_1][e^{-A_1t}B_1]^\tau dt$$
$$\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}=x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]W[f_{2\nu,n_0},0,n_0]$$
$$\cdot W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}\leq\beta_1(\nu)x_{10}^\tau W^{-1}[f_{\nu,n_0},0,n_0]x_{10}$$
$$\leq\frac{\beta_1(\nu)}{\alpha_1(\nu)}\ \mathrm{trace}\,W^{-1}(n_0)\|x_{10}\|^2. \tag{2.21}$$

定理的条件指出A_1的特征根无正实部，故e^{-A_1}的特征根不在单位圆内，应用引理

2.1，即得$W^{-1}(n_0)\to 0(n_0\to\infty)$，等价地$\operatorname{trace}W^{-1}(n_0)\to 0(n_0\to\infty)$。因此，在控制能量的限值$L$给定之后，针对$x(0^-)$，选择足够大的$n_0$，使得

$$\operatorname{trace}W^{-1}(n_0)\leq\frac{\alpha_2(\nu)L}{\|x_{10}\|^2\beta_2(\nu)},$$

并将此n_0作为（2.17）中待定之n_0，即得

$$\int_0^{n_0}u^\tau u dt\leq L.$$

此即$u(t)$能量受限，加之$u(t)$将$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(n_0)=0$，并且$x(0^-)$是任意给定的，故系统Σ在控制能量受限下状态能控．系统（1.1）亦然．

引理 2.4 设系统（2.1）状态能控，令

$$W^*[m,T,n_1]=\sum_{k=0}^{n_1-1}\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^n e^{-A_1t}B_1dt\right]$$

$$\cdot\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^n e^{-A_1t}B_1dt\right]^\tau, \tag{2.22}$$

$$e=e_1\cup e_2, \tag{2.23}$$

$$e_1=\left\{\theta\,\middle|\,\theta=\frac{2k\pi}{\operatorname{Im}(\lambda_i-\lambda_j)},\quad \begin{matrix}k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ \lambda_i,\lambda_j\text{ 为 }A_1\text{ 具有不同}\\ \text{虚部的任二特征根.}\end{matrix}\right\}, \tag{2.24}$$

$$e_2=\bigcup_{m=1}^{\infty}e_2(m), \tag{2.25}$$

$$e_2(m)=\left\{\theta\,\middle|\,\int_0^\theta t^m(\theta-t)^n e^{\lambda_j t}dt=0,\quad \begin{matrix}\lambda_j\text{ 为 }A_1\text{ 的}\\ \text{任一特征根.}\end{matrix}\right\}, \tag{2.26}$$

式中n_1为系统（2.1）的状态维数，m为任一正整数，T为任一正数，则e必为可列集，并且，当$T\in(0,\infty)-e$时，$W^*[m,T,n_1]$正定．

证 （i）证e为可列集．显然，e_1为可列集，下证$e_2(m)$为可列集．记

$$\phi_{mnj}(\theta)=\int_0^\theta t^m(\theta-t)^n e^{\lambda_j t}dt, \tag{2.27}$$

由

$$\frac{d^{m+1}}{d\theta^{m+1}}\phi_{mnj}(\theta)=m!\theta^n e^{\lambda_j\theta}, \tag{2.28}$$

知

$$\phi_{mnj}(\theta)=\varphi_1(\theta)e^{\lambda_j\theta}+\varphi_2(\theta), \tag{2.29}$$

式中 $\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$为θ的复系数多项式，且不同时恒等于零．式(2.29)说明$\phi_{mnj}(\theta)$的零点集合至多为可列集，因此，集$e_2(m)$及集e_2，e均为可列集．

(ii) 证$T\in(0,\infty)-e$时$W^*[m,T,n_1]$正定．记

$$G=e^{A_1T},\tag{2.30}$$

$$H_0(m)=\int_0^T t^m(T-t)^m e^{A_1t}dt,\tag{2.31}$$

$$H(m)=H_0(m)B_1,\tag{2.32}$$

将$W^*[m,T,n_1]$改写为

$$W^*[m,T,n_1]=\sum_{k=0}^{n_1-1}G^{-(k+1)}H(m)[G^{-(k+1)}H(m)]^T.\tag{2.33}$$

显然，要证$W^*[m,T,n_1]$正定，只须证线性离散系统$[G,H(m)]$状态能控．下证当$T\in(0,\infty)-e$时系统$[G,H(m)]$状态能控．为此，考察其能控性矩阵的秩，注意到$H_0(m)$与G乘积可交换，得

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}\,[H(m)\ \ GH(m)\cdots G^{n_1-1}H(m)]\\&=\mathrm{rank}\,H_0(m)\,[B_1\ GB_1\cdots G^{n_1-1}B_1].\end{aligned}\tag{2.34}$$

文献[7]指出，当系统(2.1)状态能控，且$T\in(0,\infty)-e_1$时，线性离散系统$[G,B_1]$状态能控，即

$$\mathrm{rank}\,[B_1\ GB_1\cdots G^{n_1-1}B_1]=n_1,\tag{2.35}$$

故为证系统$[G,H(m)]$状态能控，只须证$H_0(m)$满秩．由

$$\begin{aligned}\det H_0(m)&=\det\int_0^T t^m(T-t)^m e^{A_1t}dt\\&=\prod_{j=1}^{n_1}\int_0^T t^m(T-t)^m e^{\lambda_jt}dt,\end{aligned}\tag{2.36}$$

式中λ_j为A_1的特征根，推得当$T\in(0,\infty)-e_2$时$H_0(m)$满秩，因此，当$T\in(0,\infty)-e$时系统$[G,H(m)]$状态能控．此即$W^*[m,T,n_1]$正定．

引理 2.5 设系统(2.1)状态能控，e如(2.23)所示，$T\in(0,\infty)-e$，令

$$\begin{aligned}W^*[m,T,N^*]=\sum_{k=0}^{N^*-1}&\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]\\&\cdot\left[\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^m((k+1)T-t)^m e^{-A_1t}B_1dt\right]^T,\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$W^*(N)=\sum_{j=0}^{N-1}e^{-jA_1n_1T}[e^{-jA_1n_1T}]^T,\tag{2.38}$$

式中　$N^*=n_1N$，n_1为系统(2.1)的状态维数，N为任一自然数，则$W^*[m,T,N^*]$正

定，并且，存在正数$\alpha(m,T)$，$\beta(m,T)$，满足

$$\alpha(m,T)W^*(N)\leq W^*[m,T,N^*]\leq\beta(m,T)W^*(N).\qquad(2.39)$$

证明从略.

定理 2.2 广义系统（1.1）在控制幅值受限下状态能控的充要条件为它的 r.s.e.等价系统Σ满足

1° 慢子系统（2.1）状态能控；

2° 慢子系统（2.1）无正实部特征根.

证 只须对系统Σ给出充分性证明. 令ϵ如（2.23）所示，在$(0,1)-\epsilon$中任意选定T值，并记

$$H=H(\nu)=\int_0^T t^\nu(T-t)^\nu e^{A_1t}B_1dt,\qquad(2.40)$$

式中ν为快子系统(2.2)的N阵的幂零指数.对于初值$x(0^-)=[x_{10}^T\ x_{20}^T]^T$，作控制函数

$$u(t)=\begin{cases}u_0(t), & t\in[0,T],\\ u_1(t), & t\in[T,2T],\\ \vdots & \\ u_{N^*-1}(t), & t\in[(N^*-1)T,N^*T],\end{cases}\qquad(2.41)$$

$$u_k(t)=-(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu[e^{-(k+1)A_1T}H]^T\cdot W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10},\quad t\in[kT,(k+1)T],$$
$$k=0,1,\cdots,N^*-1,\qquad(2.42)$$

式中$W^*[\nu,T,N^*]$如（2.37）所示，$N^*=n_1N$，N为待定自然数，其值将在证明过程中由$x(0^-)$及控制幅值的限值L确定. 显然，$u(t)$在区间$[0,N^*T]$有直到$\nu-1$阶连续导数，并且

$$u^{(i)}(0)=u^{(i)}(T)=\cdots=u^{(i)}(N^*T)=0,\ i=0,1,\cdots\nu-1.\qquad(2.43)$$

由（2.15）、（2.16），并注意到

$$e^{-(k+1)A_1T}H=e^{-(k+1)A_1T}\int_0^T t^\nu(T-t)^\nu e^{A_1(T-t)}B_1dt$$
$$=\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu e^{-A_1t}B_1dt,\qquad(2.44)$$

$$\sum_{k=0}^{N^*-1}\int_{kT}^{(k+1)T}(t-kT)^\nu((k+1)T-t)^\nu e^{-A_1t}B_1dt[e^{-(k+1)A_1T}H]^T$$
$$=W^*[\nu,T,N^*],\qquad(2.45)$$

推得$u(t)$将$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(N^*T)=0$.

下面估计$\|u(t)\|$。因$x_{10}=0$时$u(t)=0$，故只须对非零的x_{10}估计$\|u(t)\|$。设t为$[0,N^*T]$内任一值，$t\in[kT,(k+1)T]$，由$u(t)$定义，得

$$\|u(t)\|^2=\|u_k(t)\|^2$$
$$=(t-kT)^{2\nu}((k+1)T-t)^{2\nu}\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^{\tau}W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2. \qquad (2.46)$$

注意到$T\in(0,1)-\varepsilon$，故

$$(t-kT)^{2\nu}((k+1)T-t)^{2\nu}\le\left(\frac{T}{2}\right)^{4\nu}\le 1. \qquad (2.47)$$

因此，由(2.46)～(2.47)，(2.44)～(2.45)及(2.39)推得

$$\|u(t)\|^2\le\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^{\tau}W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2$$
$$\le\sum_{k=0}^{N^*-1}\|[e^{-(k+1)A_1T}H]^{\tau}W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}\|^2$$
$$=x_{10}^{T}W^{*-1}[\nu,T,N^*]x_{10}$$
$$\le\frac{1}{a(\nu,T)}\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\|x_{10}\|^2. \qquad (2.48)$$

定理的条件指出A_1的特征根无正实部，故$e^{-A_1n_1T}$的特征根不分布在单位圆内，应用引理2.1，得$\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\to 0(N\to\infty)$。因此，在控制幅值的限值$L$给定之后，针对$x(0^-)$，选择足够大的$N$，使得

$$\operatorname{trace}W^{*-1}(N)\le\frac{L^2}{\|x_{10}\|^2}a(\nu,T),$$

并将此N作为(2.41)中待定之N，即得

$$\|u(t)\|\le L.$$

此即$u(t)$幅值受限，加之$u(t)$将$x(t)$由$x(0^-)$引导到$x(N^*T)=0$，并且$x(0^-)$是任意给定的，故系统Σ在控制幅值受限下状态能控。系统(1.1)亦然。

参考文献

[1] Rosenbrock, H., Structural Properties of Linear Dynamical Systems, Inf. J. Contr., **20**, 2, (1974), 191-262.

[2] Verghese, G, Levy, B. and Kailath, T., A Generalized State-Space for Singular Systems, IEEE. Trans., AC-**26**, 4, (1981), 811-831.

〔3〕 Cobb, D., Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Contr., **33**, 6,(1981), 1135－1146.
〔4〕 Rosenbrock, H., Non－minimal LCR Multiports, Int. J. Gontr., **20**, 1,(1974), 1－16.
〔5〕 Luenberger, D. and Arbel, A., Singular Dynamic Leontief Systems, Econometrica, (1977).
〔6〕 Zhao, K., Chen, Z. and Cheng, Z., Complete Controllability for Linear Constant Systems with Control Constraints, Proceedings of 9th World Congress of the International Federation of Automatic Control, **5**, (1984), 7－11.
〔7〕 关肇直、陈翰馥，线性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社（1975）。

COMPLETE CONTROLLABILITY OF GENERALIZED STATE-SPACE SYSTEMS WITH CONTROL CONSTRAINED

Cheng Zhaolin, Zhang Jifeng

(Shandong University, Jinan)

Abstract

In this paper, a necessary and sufficient condition for the state complete controllability of generalized state－space systems with control energy or control amplitude constrained is obtained. This condition shows that the complete controllability of generalized state－space systems with control constrained depends on not only the complete controllability of its slow subsystems, but also the distribution of the eigenvalues of its slow subsystems.

本文于1985年12月收到，1986年11月20日收到修改稿。